Feuille exos Calcul nombre dérivé Thiaude P.

Exercice 1 **[fonction du second degré]**

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$.

1. Démontrer que pour tout $h \neq 0$, on a :
$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -3h - 10$$
2. En déduire $f'(2)$.
3. Donner l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Corrigé

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -3x^2 + 2x - 1$

1. On a :
$$f(2) = -3(2)^2 + 2(2) - 1 = -3 \times 4 + 4 - 1$$
$$= -12 + 4 - 1 = -8 - 1 = -9$$
Soit $h \in \mathbb{R}$, on a :
$$f(2+h) = -3(2+h)^2 + 2(2+h) - 1$$
$$= -3(4 + 4h + h^2) + 4 + 2h - 1$$
$$= -12 - 12h - 3h^2 + 4 + 2h - 1$$
$$= -3h^2 - 10h - 9$$
Donc :
$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{-3h^2 - 10h - 9 + 9}{h} = \frac{-3h^2 - 10h}{h} = \frac{h(-3h - 10)}{h} = -3h - 10$$
On a donc bien, pour $h \neq 0$:
$$\boldsymbol{\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -3h - 10}$$

2. On a :
$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} (-3h - 10) = -10$$
On a donc : $\boldsymbol{f'(2) = -10}$.

3. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 admet pour équation :
$$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$
$$y = -10(x - 2) + (-9)$$
$$y = -10x + 20 - 9$$
$$y = -10x + 11$$
La tangente au point d'abscisse 2 admet pour équation réduite : $\boldsymbol{y = -10x + 11}$.

Exercice 2 **[fonction du troisième degré]**

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 + 1$.

1. Démontrer que pour tout $h \neq 0$, on a :
$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = h^2 + 4h + 5$$
2. En déduire $f'(1)$.
3. Donner l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Corrigé

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x^2 + 1$

1. On a : $f(1) = 1^3 + 1^2 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$

Pour $h \in \mathbb{R}$, on a :
$$f(1+h)$$
$$= (1+h)^3 + (1+h)^2 + 1$$
$$= (1+h)(1+h)^2 + (1+h)^2 + 1$$
$$= (1+h)(1 + 2h + h^2) + 1 + 2h + h^2 + 1$$
$$= 1 + 2h + h^2 + h + 2h^2 + h^3 + 2 + 2h + h^2$$
$$= h^3 + 4h^2 + 5h + 3$$
Donc pour tout $h \neq 0$:
$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{h^3 + 4h^2 + 5h + 3 - 3}{h} = \frac{h^3 + 4h^2 + 5h}{h} = \frac{h(h^2 + 4h + 5)}{h} = h^2 + 4h + 5$$
On a donc bien, pour tout $h \neq 0$:
$$\boldsymbol{\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = h^2 + 4h + 5}$$

2. On a :
$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} (h^2 + 4h + 5) = 5$$
On a donc finalement : $\boldsymbol{f'(1) = 5}$.

3. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 admet pour équation :
$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$
$$y = 5(x - 1) + 3$$
$$y = 5x - 5 + 3$$
$$y = 5x - 2$$
La tangente au point d'abscisse 1 admet pour équation réduite : $\boldsymbol{y = 5x - 2}$.

Exercice 3 **[fonction homographique]**

Pour tout $x \neq 3$ on pose : $f(x) = \frac{x+5}{x-3}$.

1. Démontrer que pour tout $h \neq 0$ tel que $4 + h \neq 3$ on a :

$$\frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \frac{-8}{h+1}$$

2. En déduire $f'(4)$.

3. Donner l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4.

Corrigé

$\forall x \neq 3, f(x) = \frac{x+5}{x-3}$

1. On a :

$$f(4) = \frac{4+5}{4-3} = \frac{9}{1} = 9$$

et pour tout h tel que $4 + h \neq 3$:

$$f(4+h) = \frac{4+h+5}{4+h-3} = \frac{h+9}{h+1}$$

Donc, pour $h \neq 0$ tel que $4 + h \neq 3$:

$$\frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \frac{\frac{h+9}{h+1} - 9}{h}$$

$$= \frac{\frac{h+9}{h+1} - \frac{9(h+1)}{h+1}}{h} = \frac{\frac{h+9}{h+1} - \frac{9h+9}{h+1}}{h}$$

$$= \frac{\frac{h+9-(9h+9)}{h+1}}{h} = \frac{\frac{h+9-9h-9}{h+1}}{h}$$

$$= \frac{\frac{-8h}{h+1}}{\frac{h}{1}} = \frac{-8h}{h+1} \times \frac{1}{h} = \frac{-8h \times 1}{(h+1) \times h} = \frac{-8}{h+1}$$

On a donc bien, pour $h \neq 0$ tel que $4 + h \neq 3$:

$$\boldsymbol{\frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \frac{-8}{h+1}}$$

2. On a :

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-8}{h+1} = -8$$

Finalement : $\boldsymbol{f'(4) = -8}$.

3. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4 admet pour équation :

$$y = f'(4)(x-4) + f(4)$$
$$y = -8(x-4) + 9$$
$$y = -8x + 32 + 9$$
$$y = -8x + 41$$

La tangente au point d'abscisse 2 admet pour équation réduite : $\boldsymbol{y = -8x + 41}$.